Matemática em Foco

A GEOMETRIA QUE VOCÊ NUNCA VIU

Mick Xavier

Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Federal Fluminense (RJ) com Mestrado Profissional em Ensino de Matemática pelo PROFMAT/SBM/UFF e cursou todas as disciplinas com aprovação do Mestrado em Engenharia Civil com Ênfase em Sistemas Petrolíferos – PEC/COPPE/UFRJ, mas trancou em fase de dissertação para seguir no magistério. Professor de Matemática das redes privada e pública (municipal, estadual e rede de escolas profissionalizantes) de ensino no estado do Rio de Janeiro, por 10 anos. Largou sua carreira pública estável e fundou o *Matemática em Foco*.

A GEOMETRIA QUE VOCÊ NUNCA VIU

2ª edição - Pernambuco, 2025

Edição e diagramação: Equipe Matemática em Foco

Apresentação

Seja bem-vindo ao seu livro digital ***Geometria Plana*.** Você adquiriu não só um livro, mas um verdadeiro **CURSO** elaborado pelo Prof. Mick Xavier que se preparou muito, antes de escrever esse material, fazendo Licenciatura e Mestrado nas universidades federais UFF, UFRJ, ser nomeado em 10 concursos e fundar o portal *REI – Matemática em Foco*.

Tenha certeza de que você adquiriu um material de alta qualidade elaborado por um profissional qualificado. Aproveite ao máximo e guarde-o com muito carinho.

Vamos desenvolver com você ideias importantes, construir conhecimento real e profundo que é a marca do nosso trabalho, afinal, Matemática é muito além do que apenas decorar fórmulas e regrinhas não é mesmo?

Vamos começar?

Grande abraço

O autor

Sumário

Matemática em Foco

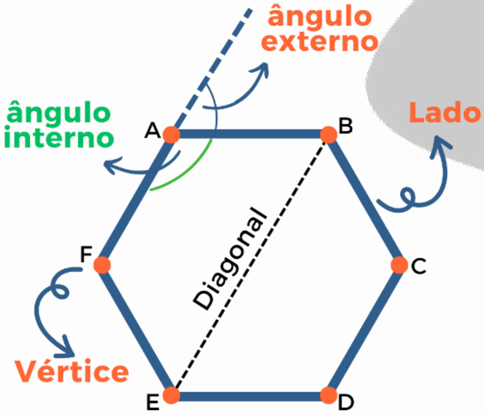
POLÍGONOS

11- Polígonos

Polígono é toda **região plana fechada** formada por segmentos de reta que não se cruzam.

Lembra do triângulo? Ele é um polígono de 3 lados. Agora estudaremos polígonos em geral, podendo ter 3 lados ou mais.

Observe abaixo um polígono com 6 lados:

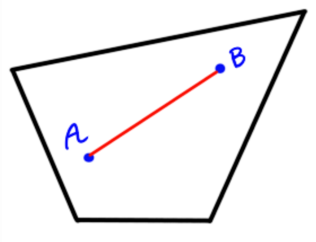


Os elementos do polígono são:

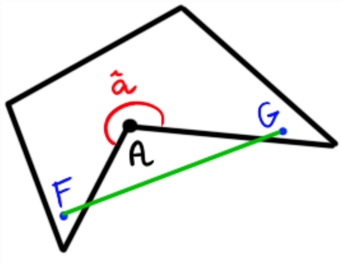
- **Vértices**;
- **Lados**: segmentos de reta com extremidades em 2 vértices consecutivos (segmento AB, BC, CD, DE, EF e AF.)
- **Diagonais**: segmentos de reta com extremidades em 2 vértices não consecutivos (segmento BE acima);
- **Ângulos internos**;
- **Ângulos externos**;

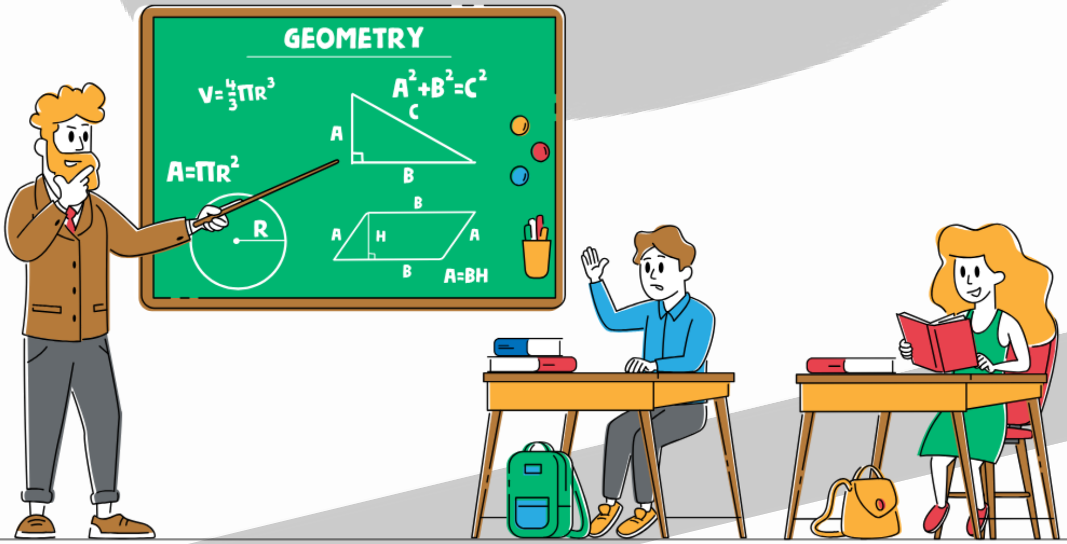
11.1– Polígonos côncavos e convexos

1 **Polígono convexo:** Um polígono é considerado convexo quando qualquer segmento que une dois pontos internos, sempre está inteiramente contido no interior do polígono. Veja a figura abaixo:



2 **Polígono côncavo:** Possui pelo menos um ângulo interno maior que 180^0. Neste caso existe um par de pontos internos cujo segmento que os une, não está inteiramente contido no interior do polígono. Veja a figura abaixo:





11.2– Nomenclatura

Os polígonos são nomeados de acordo com a **quantidade de lados**. Observe a tabela.

Número de lados	Nomenclatura
3	**Tri**ângulo
4	**Qua**drilátero
5	**Pentá**gono
6	**Hexá**gono
7	**Heptá**gono
8	**Octó**gono
9	**Eneá**gono
10	**Decá**gono
11	**Undecá**gono
12	**Dodecá**gono
15	**Pentadecá**gono
20	**Icos**ágono

Atenção: Você precisa decorar esses nomes. Note que os prefixos seguem uma lógica padrão, **penta (5)**, **hexa (6)**, **deca (10),** etc.

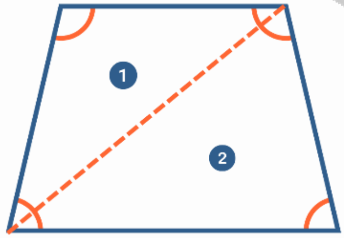
11.3 – Soma dos Ângulos Internos

Sabemos que a soma dos ângulos internos do triângulo é 180^0. Então quanto será essa soma dos ângulos internos para polígonos com mais de 3 lados?

Para responder essa pergunta, a ideia será justamente **dividir os polígonos em triângulos**, contar o número de triângulos obtidos e multiplicar este número por 180^0. Faz sentido?

Veja os exemplos.

1 Quadrilátero:



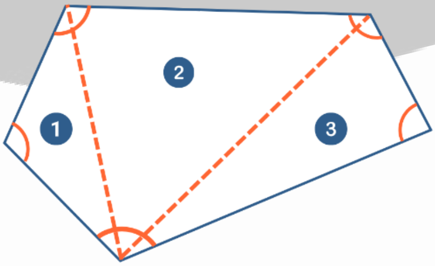
N° Lados: ____4____

N° Triângulos Obtidos: ____2____

Cálculo: ____2 . 180°____

Soma Ângulos Internos: 360°

2 Pentágono:



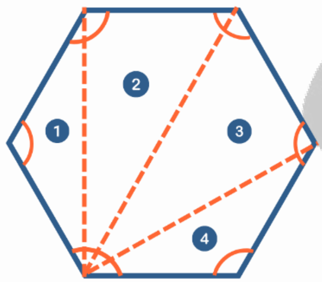
N° Lados: 5

N° Triângulos Obtidos: 3

Cálculo: 3 . 180°

Soma Ângulos Internos: 540°

Hexágono:



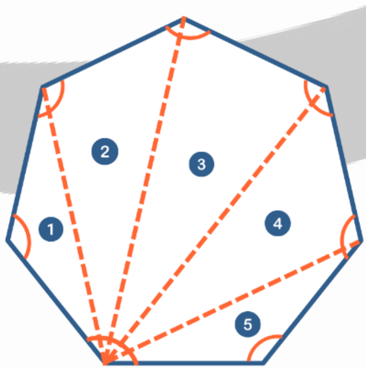
N° Lados: 6

N° Triângulos Obtidos: 4

Cálculo: 4 . 180°

Soma Ângulos Internos: 720°

Heptágono:



Nº Lados: 7

Nº Triângulos Obtidos: 5

Cálculo: 5 . 180°

Soma Ângulos Internos: 900°

Conseguiu observar algum padrão? Com os exemplos anteriores você seria capaz de calcular a soma dos ângulos internos de um polígono com 20 lados ? O padrão está na **quantidade triângulos obtidos** que corresponde ao **número de lados menos dois**. Portanto um polígono de **20 lados terá 18 triângulos**.

Nº Lados: 20

Nº Triângulos Obtidos: 18

Cálculo: 18 . 180°

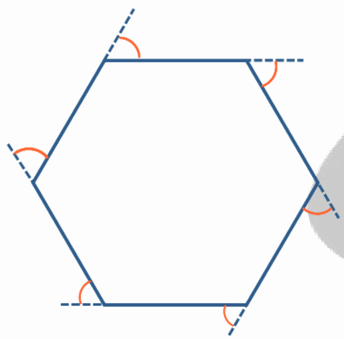
Soma Ângulos Internos: 3240°

Portanto se um polígono tiver **N lados**, formará **(N – 2) triângulos**. E assim chegamos na fórmula:

Fórmula: $S_i = (n-2).180^0$

11.4 – Soma dos Ângulos Externos

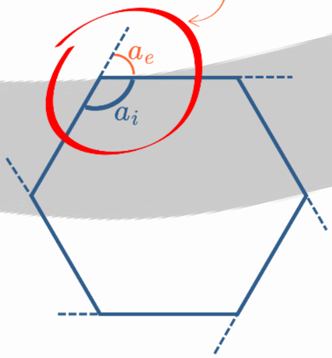
A <u>**soma dos ângulos externos**</u> de todo polígono convexo é uma informação importante e que também precisaremos no estudo dos *Polígonos Regulares*.



A boa notícia é que a soma dos ângulos externos dos polígonos convexos **não varia**, ou seja, dá sempre o mesmo resultado. Conseguimos deduzir esse valor.

Primeiro vamos observar que a **soma de um ângulo interno com seu ângulo externo** sempre resulta **180^0** pois juntos eles formam um <u>ângulo raso</u>.

$$\boxed{a_i + a_e = 180^0}$$



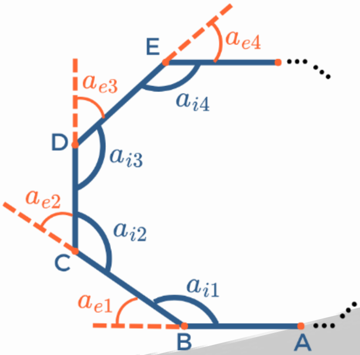
Agora vamos **generalizar**, supondo que temos um polígono de **N lados**, logo temos:

- N vértices;
- N ângulos internos;
- N ângulos externos;

O que queremos descobrir é a ***Soma dos Ângulos Externos***, de um polígono convexo qualquer de N lados:

$$\underbrace{\boxed{a_{e1} + a_{e2} + a_{e3} + \ldots + a_{en} = ???}}_{S_e}$$

Em cada um dos **N vértices**, teremos um par de ângulos interno e externo que somam 180^0.



Logo teremos N somas que resultam em 180^0:

$$\begin{aligned} a_{i1} + a_{e1} &= 180^0 \\ a_{i2} + a_{e2} &= 180^0 \\ a_{i3} + a_{e3} &= 180^0 \\ \vdots \quad \vdots \quad & \quad \vdots \\ a_{in} + a_{en} &= 180^0 \end{aligned}$$

1 Note que se somarmos todos os valores da coluna esquerda corresponde à **soma dos ângulos internos do polígono de N lados:**

$$\begin{aligned} \boxed{\begin{matrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \\ \vdots \\ a_{in} \end{matrix}} \begin{matrix} + a_{e1} &= 180^0 \\ + a_{e2} &= 180^0 \\ + a_{e3} &= 180^0 \\ \vdots & \vdots \\ + a_{en} &= 180^0 \end{matrix} \end{aligned}$$

Soma Ângulos Internos

$S_i = (n-2).180^0$

2 Note que se somarmos todos os valores da coluna do meio corresponde à **soma dos ângulos externos que queremos descobrir:**

$$\begin{matrix} a_{i1} + \\ a_{i2} + \\ a_{i3} + \\ \vdots \\ a_{in} + \end{matrix} \boxed{\begin{matrix} a_{e1} \\ a_{e2} \\ a_{e3} \\ \vdots \\ a_{en} \end{matrix}} \begin{matrix} = 180^0 \\ = 180^0 \\ = 180^0 \\ \vdots \\ = 180^0 \end{matrix}$$

Soma Ângulos Externos

$S_e = ???$

3 Note ainda que se somarmos todos os valores da coluna direita corresponde à **soma de N parcelas de 180^0**, portanto **180^0.N:**

$$
\begin{aligned}
a_{i1} + a_{e1} &= 180^0 \\
a_{i2} + a_{e2} &= 180^0 \\
a_{i3} + a_{e3} &= 180^0 \\
\vdots \qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\
a_{in} + a_{en} &= 180^0
\end{aligned}
$$

N parcelas de 180°

$$180^0 . N$$

❹ Por fim, se somarmos as 3 colunas, obtemos uma equação e **isolamos o S_E:**

$$(n-2).180^0 + S_E = 180^0 . n$$

$$\cancel{180^0 n} - 360^0 + S_E = \cancel{180^0 n}$$

$$\boxed{S_E = 360^0}$$

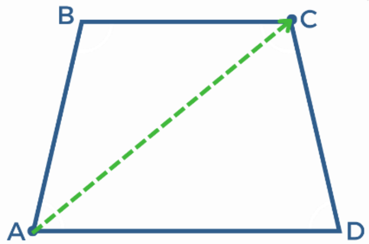
Portanto a **soma dos ângulos externos** de qualquer polígono convexo é 360^0.

11.5 – Número de diagonais

Saber o número de diagonais de um polígono é uma informação importante que também iremos precisar. Inicialmente vamos traçar as diagonais de alguns polígonos de forma manual e tentar descobrir um padão.

1 **Triângulo**: não possui diagonais.

2 **Quadrilátero**: lembre-se que a diagonal é o segmento de reta que une dois vértices não adjacentes.

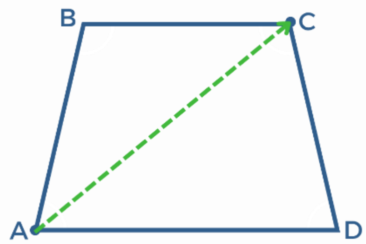


Observe que o **segmento AC** destacado no quadrilátero ABCD acima é uma **diagonal**. Essa é a única diagonal que conseguimos traçar no vértice A. Ou seja, em todos os vértices do quadrilátero conseguiremos traçar 1 diagonal. Mas observe que a diagonal que iremos traçar no vértice C é exatamente a mesma diagonal que traçamos no vértice A, já que os segmentos **AC e CA são iguais**.

Então para **calcularmos o total de diagonais** é ideia será bem simples:

Contamos o número de diagonais que conseguimos traçar de cada vértice, multiplicamos pelo número de vértices e dividimos o resultado por 2 para não contar cada diagonal duas vezes.

Resumindo:



N° Vértices: 4

Diagonais por vértice: 1

Número de vértices

Diagonais por vértice

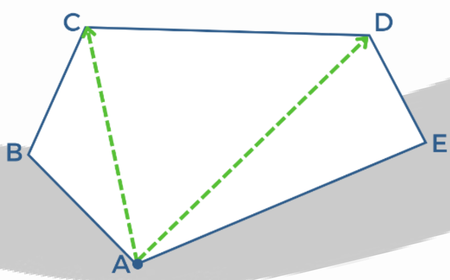
Cálculo: $\frac{4.1}{2}$

Cada diagonal foi contada 2 vezes

Total de diagonais: 2

Para os próximos exemplos, vamos usar exatamente a mesma ideia.

8 Pentágono:



Observe que neste caso é possível traçar **2 diagonais em cada vértice**.

N° Vértices: 5

Diagonais por vértice: 2

Número de vértices

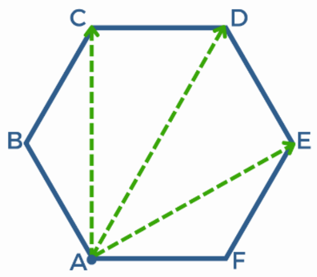
Diagonais por vértice

Cálculo: $\dfrac{5.2}{2}$

Cada diagonal foi contada 2 vezes

Total de diagonais: 5

❹ Hexágono:



Neste caso é possível traçar **3 diagonais em cada vértice**.

N° Vértices: 6

Diagonais por vértice: 3

Número de vértices

Diagonais por vértice

Cálculo: $\dfrac{6.3}{2}$

Cada diagonal foi contada 2 vezes

Total de diagonais: 9

🤔 **Conseguiu observar algum padrão?** Com os exemplos anteriores você seria capaz de calcular o número de diagonais de um polígono com 20 lados ?

O padrão está na **quantidade de diagonais em cada vértice** que corresponde ao **número de lados menos três**. Portanto um polígono de **20 lados terá:**

N° Vértices: 20

Diagonais por vértice: 17

Número de vértices

Diagonais por vértice

Cálculo: $\dfrac{20.17}{2}$

Cada diagonal foi contada 2 vezes

Total de diagonais: 170

Então se um polígono tiver **N lados**, de cada vértice serão traçadas **(N – 3) diagonais**.

E assim chegamos na fórmula:

N° Vértices: N

Diagonais por vértice: (N - 3)

Número de vértices

Diagonais por vértice

Fórmula: $\boxed{\dfrac{N.(N-3)}{2}}$

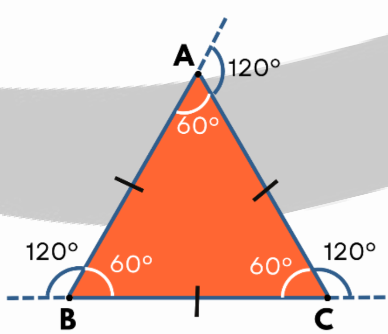
Cada diagonal foi contada 2 vezes

12- Polígonos Regulares

Um polígono é dito **REGULAR** quando:

- todos os lados são congruentes;
- todos os ângulos internos são congruentes;
- todos os ângulos externos são congruentes.

Como exemplo, podemos citar o **triângulo equilátero** e o **quadrado**, já que possuem todas as características citadas acima.



12.1 – Ângulos do Polígono Regular

Considere um polígono regular de **n lados**.

1 **Ângulo interno**: Como todos os ângulos internos (**a_i**) são congruentes, descobrimos o valor de cada ângulo interno calculando a soma dos ângulos internos (**S_i**) e dividimos pela quantidade **n** de ângulos. Faz sentido?

Assim obtemos a fórmula:

$$a_i = \frac{S_i}{n} \Rightarrow a_i = \frac{(n-2).180^0}{n}$$

2 **Ângulo externo**: Considere um polígono regular de n lados. Como todos os ângulos externos (a_E) são congruentes, descobrimos esse valor calculando a soma dos ângulos externos (360^0) e dividimos pela quantidade n de ângulos externos.

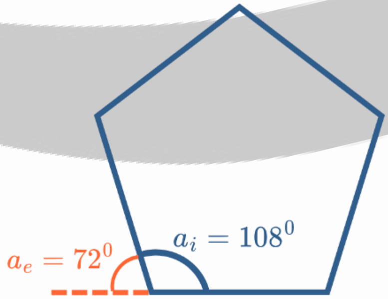
Assim obtemos a fórmula:

$$a_E = \frac{S_E}{n} \Rightarrow a_E = \frac{360^0}{n}$$

Fixando a ideia com

EXEMPLO

1 **Exemplo**: Pentágono regular



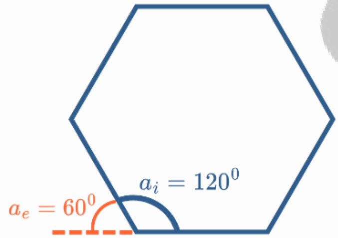
Nº Lados: 5

Ângulo interno: $a_i = \dfrac{(5-2).180^0}{5} = \boxed{108^0}$

Ângulo externo: $a_e = \dfrac{360^0}{5} = \boxed{72^0}$

$\boxed{a_e = 180^0 - a_i}$

2 **Exemplo**: Hexágono regular



Nº Lados: 6

Ângulo interno: $a_i = \dfrac{(6-2).180^0}{6} = \boxed{120^0}$

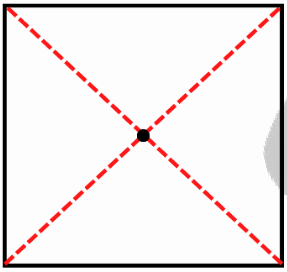
Ângulo externo: $a_e = \dfrac{360^0}{6} = \boxed{60^0}$

$\boxed{a_e = 180^0 - a_i}$

12.2 – Diagonais que passam pelo centro

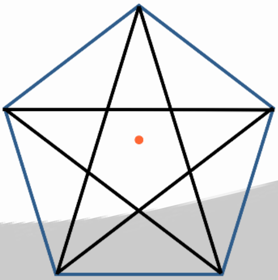
Um polígono regular pode apresentar diagonais que passam pelo centro, ou não. Vejamos alguns exemplos:

1 **Exemplo**: Quadrado



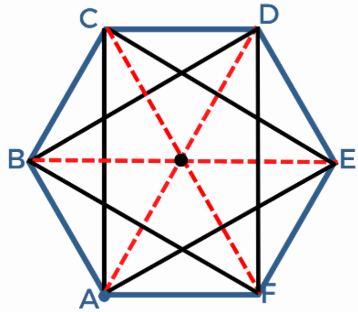
Note que o quadrado (4 lados) possui **2 diagonais que passam pelo centro** destacadas na cor vermelha.

2 **Exemplo**: Pentágono regular



Já no pentágono regular (5 lados), nenhuma de suas diagonais passam pelo centro.

3 **Exemplo**: Hexágono regular

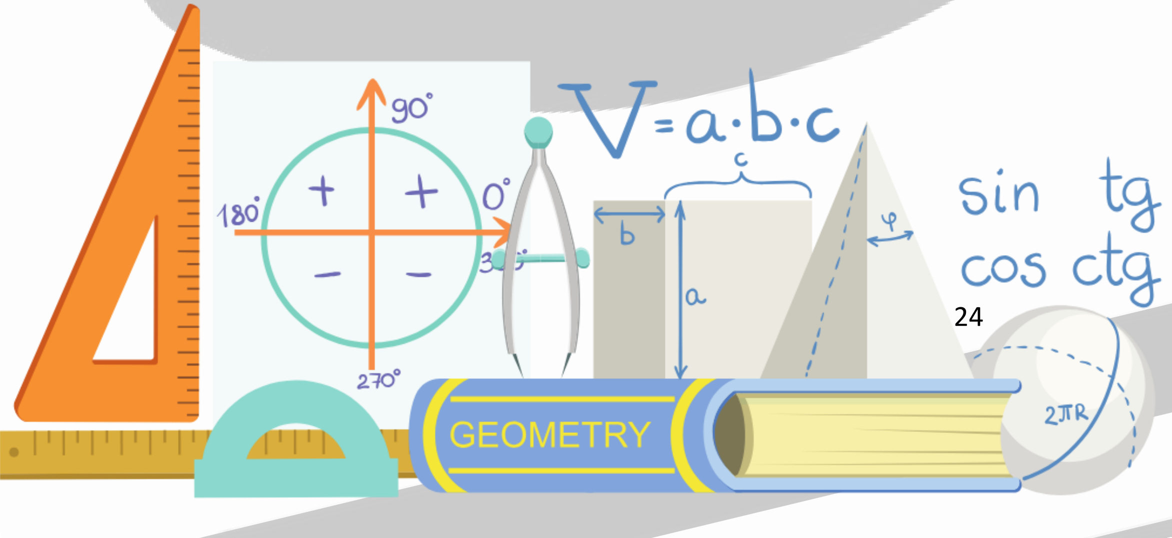


O Hexágono regular (6 lados) possui 9 diagonais, e exatamente **3 diagonais passam pelo centro** destacadas na cor vermelha.

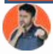
CONCLUSÃO

Polígonos regulares com quantidade **ímpar** de lados **não possuem diagonais passando pelo centro**.

Se a quantidade **n lados** do polígono regular for **par**, então $\frac{n}{2}$ diagonais passam pelo centro.



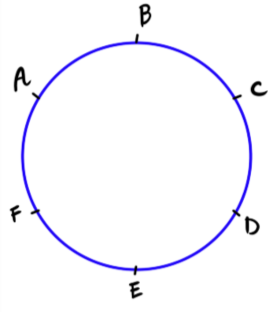
12.3 – Propriedades polígonos regulares



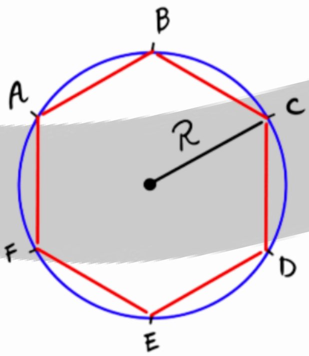
Além do que já vimos até aqui, existem propriedades importantes em todos os polígonos regulares que veremos a seguir:

1 **Todo polígono regular pode ser INSCRITO em uma circunferência:** Um polígono está inscrito numa circunferência se todos os **vértices são pontos dessa circunferência**.

Suponha que vamos dividir uma circunferência em **arcos de mesma medida** conforme a figura abaixo.



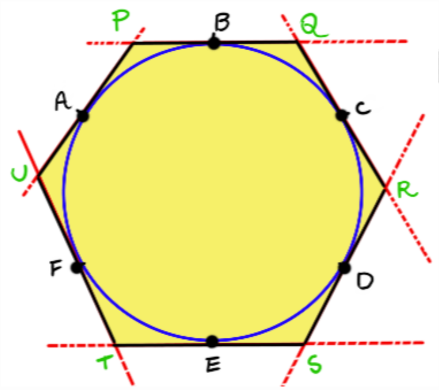
Em seguida vamos ligar os pontos marcados sobre a circunferência, formando o polígono ABCDEF:



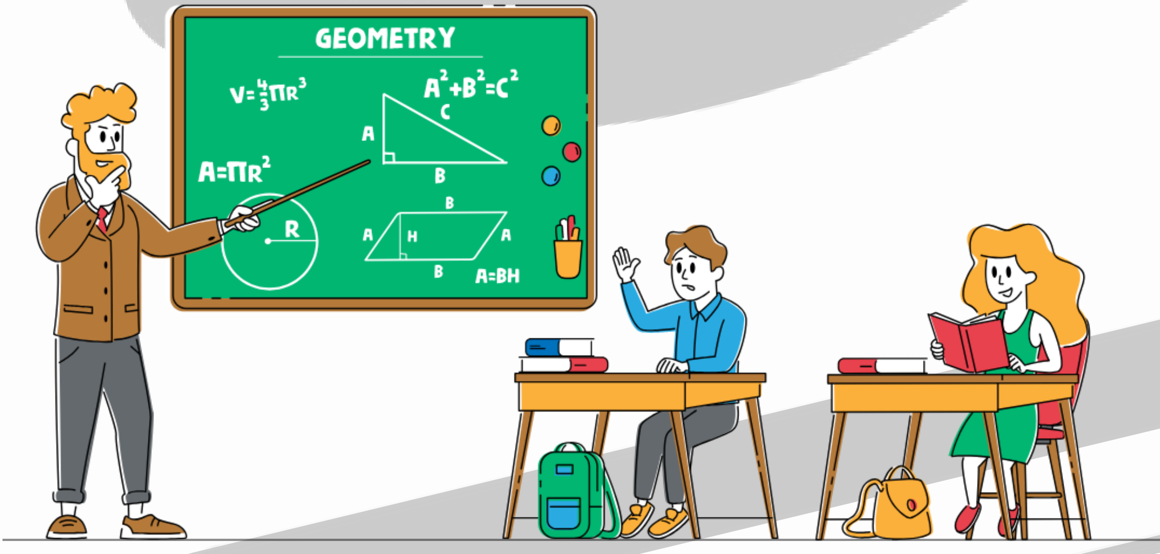
O polígono ABCDEF é regular e está inscrito na circunferência.

2 Todo polígono regular pode ser CIRCUNSCRITO a uma circunferência: Um polígono está circunscrito a uma circunferência quando todos os seus **lados são tangentes a essa circunferência.**

Se dividirmos uma circunferência em arcos de mesma medida, a interseção das retas tangentes traçadas nesses pontos de divisão corresponderá aos vértices do polígono regular circunscrito:

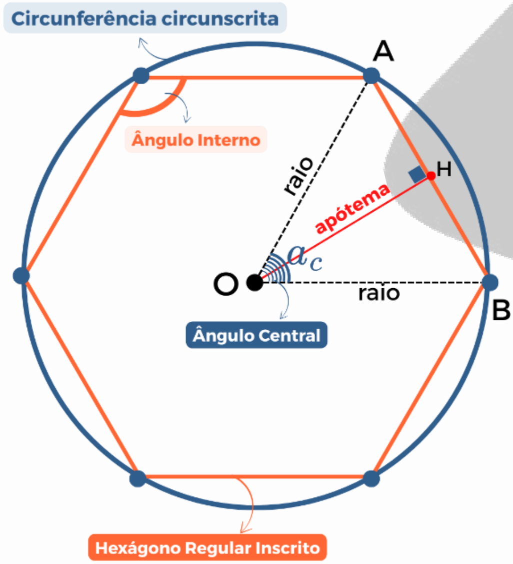


O hexágono PQRSTU é regular e está circunscrito à circunferência.



12.4 – Elementos dos polígonos regulares

Existem outros elementos a serem considerados nos polígonos regulares inscritos. Destacamos abaixo um hexágono regular inscrito:



Os elementos a serem destacados são:

1 **Apótema:** dá-se o nome de **apótema** todo segmento de reta que liga o centro do polígono regular até o ponto médio de qualquer um dos seus lados, perpendicularmente.

Neste caso, o triângulo OAB é equilátero e o lado $\overline{OA}$ corresponde ao raio da circunferência, então $\overline{OA} = R$. Sendo assim a **apótema corresponde à altura do triângulo equilátero** AOB, usando a fórmula da altura do triângulo equilátero obtemos: $\overline{OH} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

2 Ângulo central: Possui a mesma medida do ângulo externo e possui as características do ângulo central no interior de uma circunferência. Sua medida é calculada da mesma maneira que calculamos o ângulo externo do polígono regular, portanto:

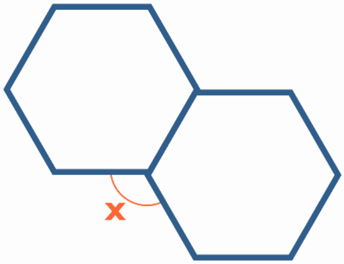
$$a_c = \frac{360^0}{n}$$

Neste caso, o polígono possui 6 lados então $a_c = \frac{360^0}{6} = 60^0$.

12.5 – Exercícios básicos

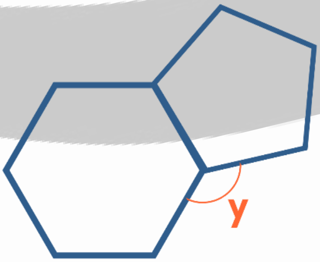
Os polígonos destacados abaixo são regulares. Encontre a medida do ângulo indicada em cada caso.

1



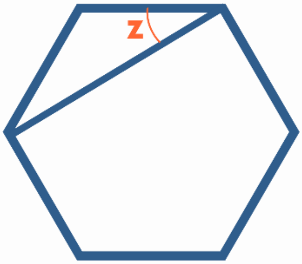
Calcule o valor de **x**.

2



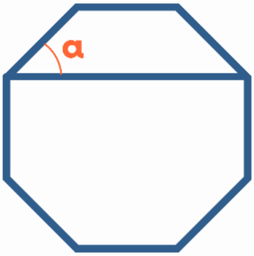
Calcule o valor de **y**.

3



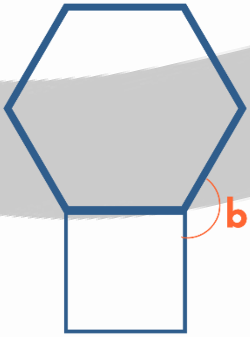
Calcule o valor de **z**.

4



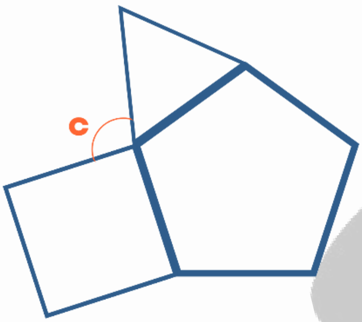
Calcule o valor de **a**.

5

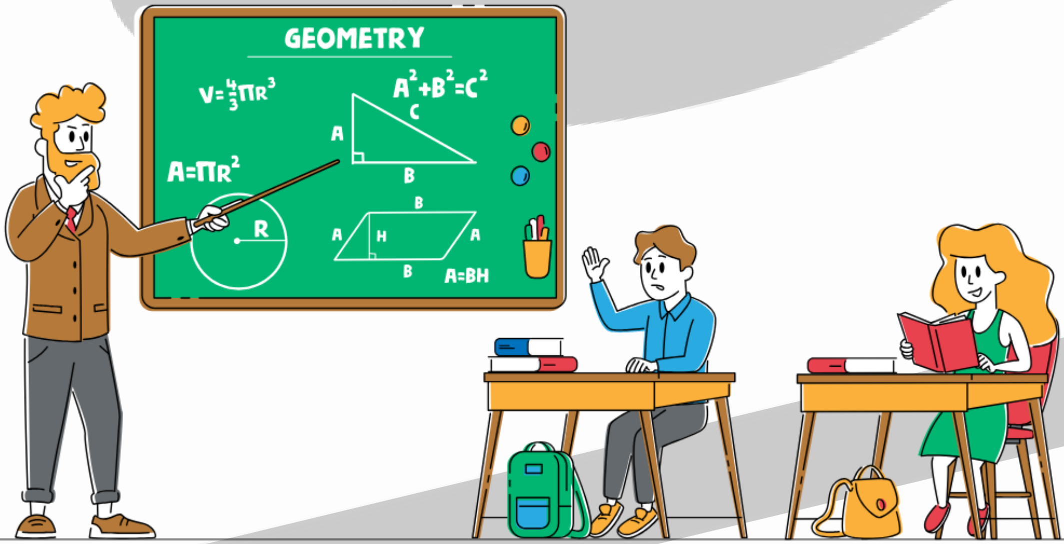


Calcule o valor de **b**.

6



Calcule o valor de **c**.



12.6 – Gabarito

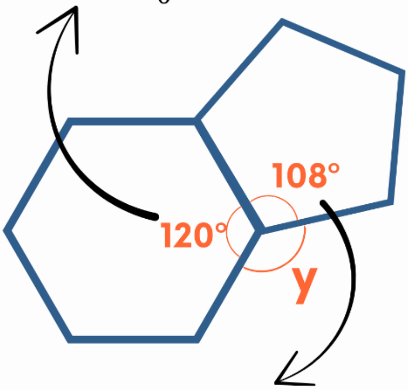
1 Calcule o ângulo interno do hexágono regular ($x = 120^0$).

2 Calcule os ângulos internos do hexágono e pentágono regular usando um desses caminhos:

- Aplique direto a fórmula do ângulo interno ou
- Calcule o ângulo externo e subtraia este valor de 180^0;

Optando pela primeira opção temos:

$$a_i = \frac{(6-2)\times 180^0}{6} = 120^0$$



$$a_i = \frac{(5-2)\times 180^0}{5} = 108^0$$

Por fim, sabemos que **a soma dos 3 ângulos destacados resulta em 360^0** então:

$$y = 360^0 - \left(108^0 + 120^0\right)$$

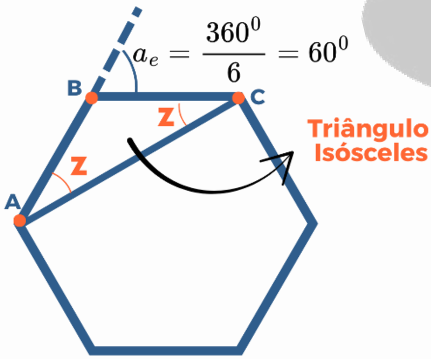
$$y = 360^0 - 228^0$$

$$\boxed{y = 132^0}$$

3 Primeiro passo para resolver a questão é identificar que o triângulo ABC destacado abaixo é isósceles já que AB = BC e, portanto, a base AC do triângulo possui **dois ângulos com medida z**. Agora podemos escolher qual caminho seguir:

- Descobrir o ângulo interno do hexágono e depois usar a soma dos ângulos internos do triângulo;
- Descobrir o ângulo externo e depois aplicar o teorema do ângulo externo do triângulo.

Optando pela segunda opção temos:

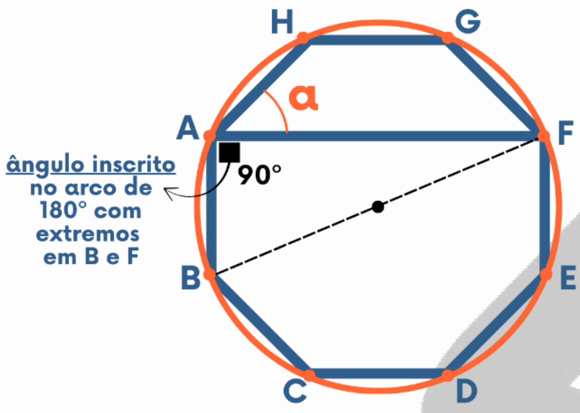


Teorema Ângulo Externo

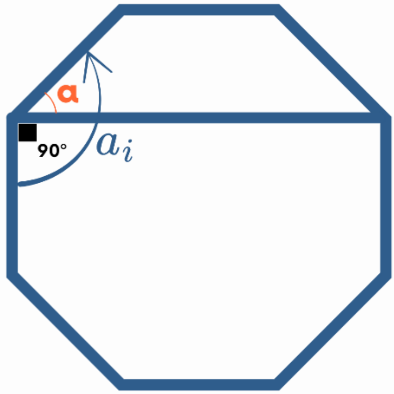
$$\boxed{z = \frac{60^0}{2} = 30^0}$$

4 Um forma de resolver essa questão é traçando a circunferência circunscrita ao polígono e o seu diâmetro BF. Note que o ângulo BÂF está inscrito em um arco de 180^0, portanto sua medida é 90^0.

Veja a figura seguir.



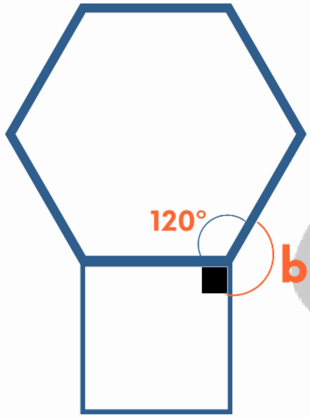
Agora para descobrir a medida **a** indicada devemos calcular a medida do ângulo interno do polígono regular e subtrair de 90^0.



$$a_i = \frac{(8-2)\times 180^0}{8} = 135^0$$

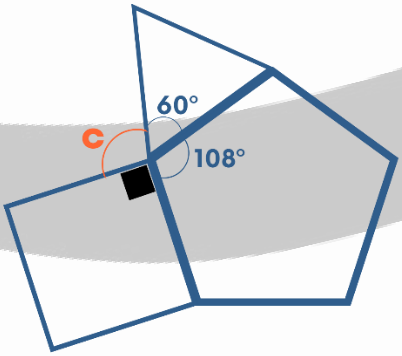
Então, **b** = $135^0 - 90^0$ = **45^0.**

5 Preencha a figura com os ângulos internos do hexágono regular e do quadrado. Some esses valores e subtraia o resultado de 360^0:



$$b = 360^0 - (120^0 + 90^0)$$
$$b = 360^0 - 210^0$$
$$\boxed{b = 150^0}$$

5 Preencha a figura com os ângulos internos do triângulo equilátero, do quadrado e do pentágono regular. Some esses valores e subtraia o resultado de 360^0:



$$c = 360^0 - (60^0 + 108^0 + 90^0)$$
$$c = 360^0 - 258^0$$

$$\boxed{b = 102^0}$$

Considerações finais

Ufa, terminamos!

A minha curiosidade agora é saber como foi a sua experiência com esse livro. Apesar de ter consciência sobre a qualidade do conteúdo, eu quero ouvir isso de você. Assim você me ajuda a continuar escrevendo os melhores livros de Matemática.

É claro que você não deve parar por aqui, continue estudando e se aperfeiçoando. Inclusive, se você quiser conferir todas as explicações dos conteúdos e resoluções das questões deste livro em videoaulas, além de vários outros recursos, assine meu curso completo no site https://www.matematicaemfoco.com.br .

Tire uma foto, faça um vídeo, poste no *instagram* e marque o perfil ***@oficialmatematicaemfoco***. Vou ter grande prazer em saber da sua experiência e compartilhar por lá.

Te vejo na próxima!

Prof. Mick Xavier

PLATAFORMA COMPLETA

ESTUDE NO PORTAL REI

- Aulas teóricas detalhadas;
- Resoluções passo a passo;
- Apostilas, Atividades e Jogos;
- Exercícios;
- Simulados com temporizador;
- **A melhor didática de ensino.**