POTENCIAÇÃO E DIVISIBILIDADE

POTENCIAÇÃO E DIVISIBILIDADE

POTÊNCIA BASICAMENTE É A MULTIPLICAÇÃO DE FATORES IGUAIS.

Toda potência é formada por dois números: **Base e expoente.** Esses números podem ser naturais, inteiros, decimais, fracionários, racionais e até irracionais. Vamos definir aqui tudo de uma maneira simples.

Figura 1- elementos da potência

A **base** de uma potência é o número (fator) que deve ser multiplicado por ele mesmo. E o **expoente** indica quantas vezes devemos multiplicar a base. Veja a figura a seguir.

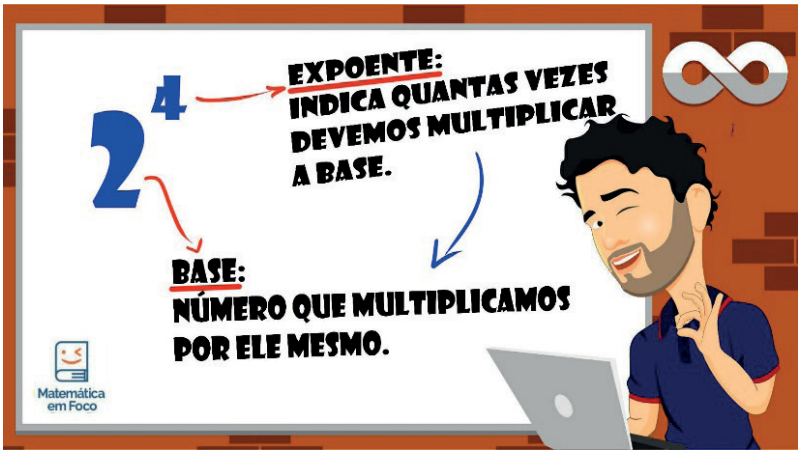


Figura 2 - base e expoente

MUITO CUIDADO COM ESSE ERRO COMUM!

Xavialuno, cuidado para não cometer um erro muito comum que é: ***"multiplicar a base pelo expoente",*** conforme indicamos nas figuras abaixo.

Figura 3 - cuidado com esse erro.

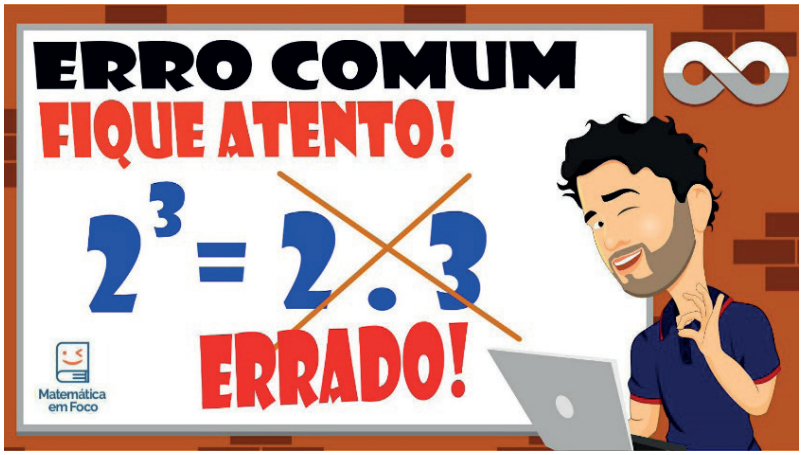


Figura 4 - erro comum

PROPRIEDADES DE POTÊNCIA

Em geral, os alunos preferem simplesmente decorar todas as propriedades. Mas sugerimos que você entenda um pouco mais, por isso ensinamos algumas ideias para complementar seu aprendizado. **Fique atento à todas as ideias pois vai precisar delas nas resoluções.**

MULTIPLICAÇÃO DE POTÊNCIAS DE MESMA BASE

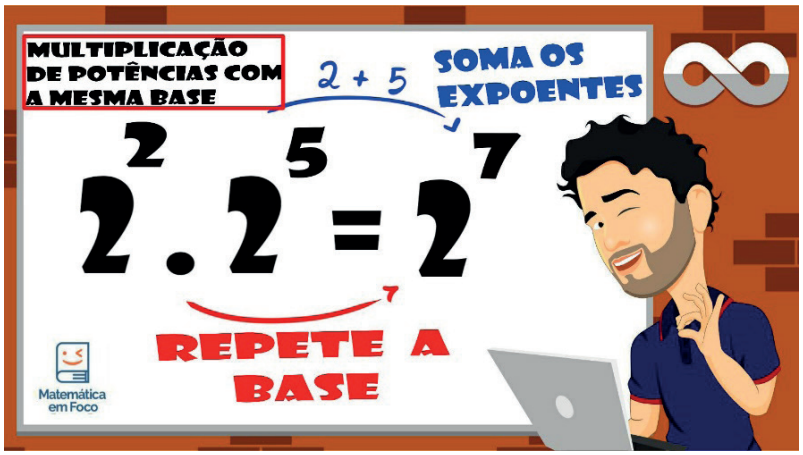


Figura 5 - multiplicação de potências de mesma base

Na multiplicação de potências de mesma base, podemos simplificar para uma única potência, basta **repetir a base e somar os expoentes**.

DIVISÃO DE POTÊNCIAS DE MESMA BASE

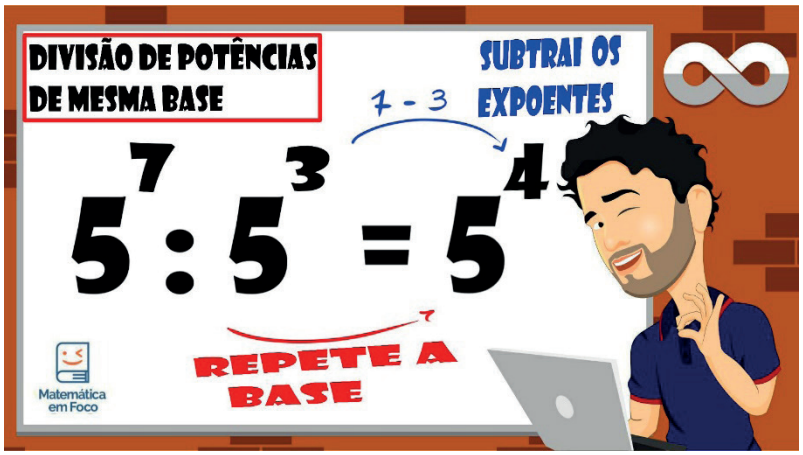


Figura 6 - divisão de potências de mesma base

Na divisão de potências de mesma base, podemos simplificar para uma única potência, basta **repetir a base e subtrair os expoentes.**

POTÊNCIAS COM EXPOENTE ZERO

Figura 7 - potências com expoente zero

Qualquer número (exceto zero) elevado à zero resulta em 1.

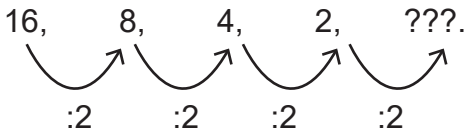
Mas por que?

Uma forma simples de explicar isso é através da tabela de potências, podendo ser potências de 2, por exemplo. Vamos escrever algumas potências de 2, diminuindo o valor do expoente a partir do 4:

POTÊNCIA	RESULTADO
2^4	**16**
2^3	**8**
2^2	**4**
2^1	**2**
2^0	**???**

Note que os resultados obtidos seguem a sequência 16, 8, 4, 2, ???.

O último número da sequência é justamente o resultado de "2 elevado à zero". Não é difícil notar que cada valor da sequência é metade do anterior, ou seja, avançamos pela sequência dividindo por 2:



Portanto, o valor procurado é igual a 2/2 = 1. Sendo $2^0 = 1$.

POTÊNCIA DE POTÊNCIA

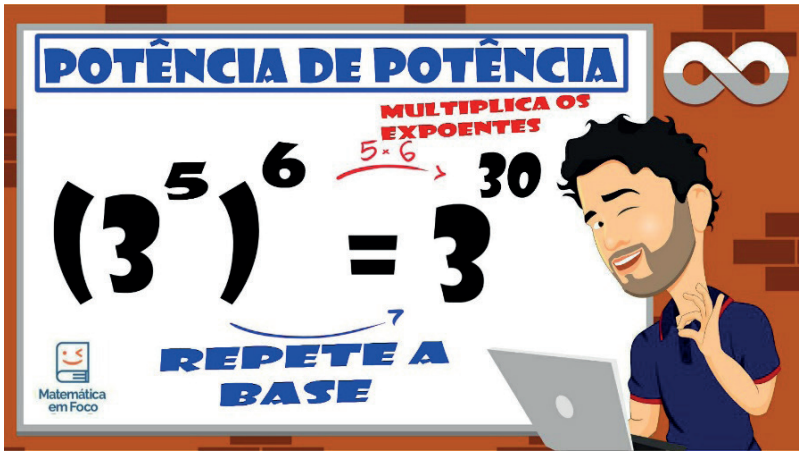


Figura 8 - potência de potência

Quando existe um potência, elevada à um expoente externo (chamamos **"potência de potência"**), podemos simplificar para uma única potência, basta **repetir a base e multiplicar os expoentes.**

No entanto, muito cuidado com a propriedade acima, pois para aplicarmos é preciso ter a presença dos parênteses que separam a potência interna do expoente externo. Caso não tenha, a potência fica com resultado completamente diferente conforme a imagem abaixo.

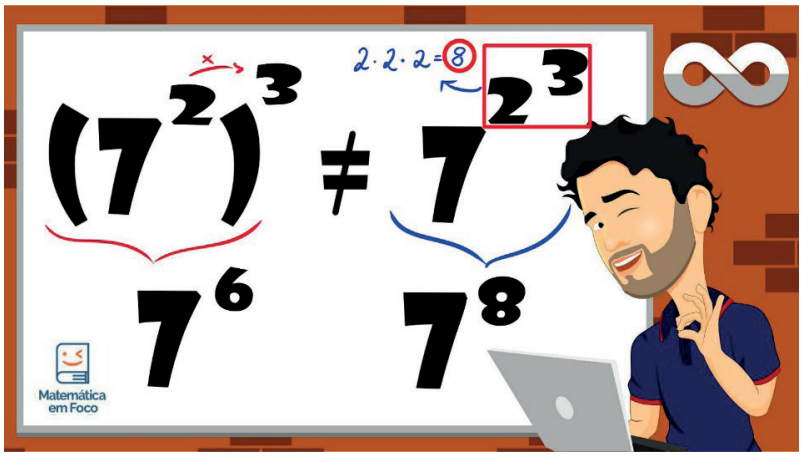


Figura 9 - a presença dos parênteses faz diferença

< ATENÇÃO

POTÊNCIA DE UM PRODUTO

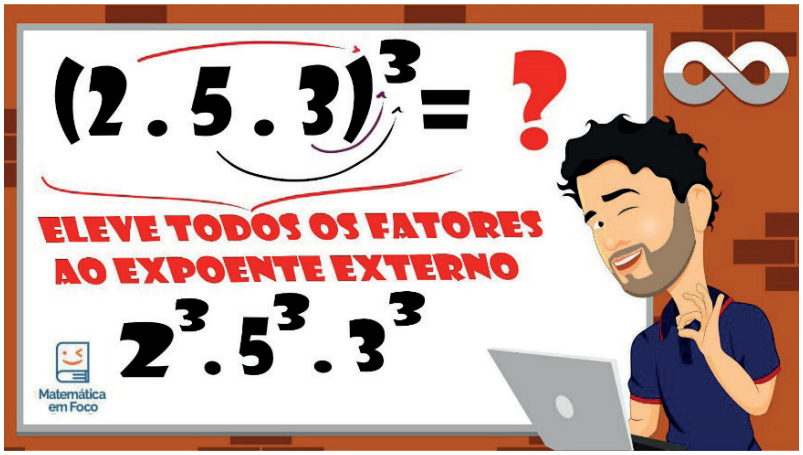


Figura 10 - potência de um produto

Quando existe um produto de números (podendo ser potências) elevados à um expoente externo podemos simplificar o cálculo, elevando todos os fatores (ou potências) da multiplicação ao expoente externo. **Note também a importância da existência dos parênteses.**

POTÊNCIA DE UM QUOCIENTE OU FRAÇÃO

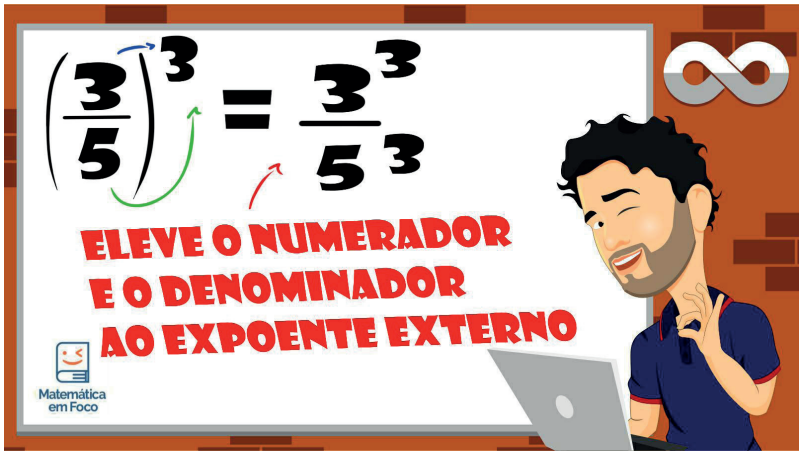


Figura 11 - potência de um quociente ou fração

Quando existe uma divisão (ou quociente) de números (podendo ser potências) elevados à um expoente externo podemos simplificar o cálculo, elevando todos os fatores (ou potências) da divisão ao expoente externo. **Note também a importância da existência dos parênteses.**

FRAÇÃO ELEVADA A UM EXPOENTE NEGATIVO

Figura 12 - fração com expoente negativo

Quando uma potência possui expoente negativo, podemos mudar o sinal do expoente, invertendo a base da potência. Isso também pode ser feito quando o expoente é positivo.

A base da potência pode ser um número fracionário, ou não.

NÚMERO INTEIRO ELEVADO A UM EXPOENTE NEGATIVO

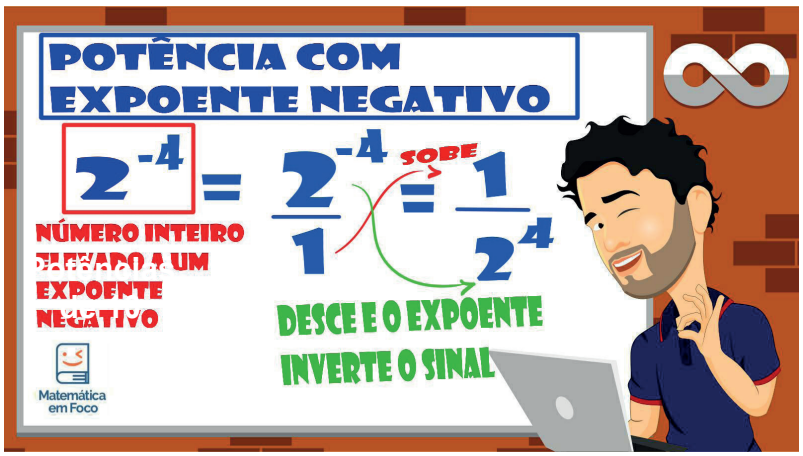


Figura 13 - número inteiro com expoente negativo

Segue o mesmo princípio da propriedade anterior.

POTÊNCIAS DE 10

Números muito grandes e muito pequenos são muito utilizados em estudos científicos em várias áreas do conhecimento como Física, Química, Astronomia etc. Vejamos alguns exemplos:

1. A massa da Terra é de 5 980 000 000 000 000 000 000 000 kg;

2. A massa de um próton é de 0,000000 000000000000000000001673 kg

A leitura desses números é facilitada quando utilizamos as **potências de base 10,** que representam números grande como 1.000.000 (um milhão), 1.000.000.000 (um bilhão), 1.000.000.000.000 (um trilhão) etc., e números muito pequenos como 0,001 (um milésimo), 0,000001 (um milionésimo), 0,000000001 (um bilionésimo) e assim sucessivamente.

Cada um desses números pode ser representado como um potência de base 10. Lembremos que **potência é a multiplicação de fatores iguais**, e que toda potência é formada por uma *BASE* e *EXPOENTE*. Vejamos um exemplo:

$$\mathbf{1000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3}$$

Como já sabemos, a *BASE* da potência é o fator que multiplicamos POR ELE MESMO, e o *EXPOENTE* indica quantas vezes devemos multiplicar o fator. Na potência 10^3 acima, a base é 10 e o expoente é 3. Note que o expoente é 3 pois multiplicamos a base 10, três vezes.

$$\mathbf{1000 = \underbrace{10 \times 10 \times 10}_{3 \text{ vezes}} = 10^3}$$

Lê-se essa potência como **"*dez ao cubo*"** ou "***dez elevado à três*".**
Vejamos mais exemplos de potências de base 10 com **EXPOENTE POSITIVO**:

$\underbrace{10.000}_{4 \text{ zeros}} = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$ ⟷ Expoente corresponde à quantidade de zeros.

$\underbrace{100.000}_{5 \text{ zeros}} = 10 \times 10x\ 10 \times 10 \times 10 = 10^5$

$\underbrace{1.000.000}_{6 \text{ zeros}} = 10 \times 10x\ 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^6$

Vejamos agora exemplos de potências de base 10 com **EXPOENTE NEGATIVO**:

$0,1 = 10^{-1}$
$0,01 = 10^{-2}$
$0,001 = 10^{-3}$
$0,0001 = 10^{-4}$
$\underbrace{0,00001}_{5 \text{ casas decimais}} = 10^{-5}$ ⟷ Expoente corresponde ao oposto do número de casas decimais.

OBSERVAÇÃO:

1. Os exemplos anteriores também podem ser transformados em fração, em seguida aplicamos uma propriedade de potência conforme vemos abaixo:

$$0{,}1 = \frac{1}{10} = \frac{1}{10^1} = 10^{-1}$$

$$0{,}01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$$

$$0{,}001 = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$$

A leitura de números muito grandes e muito pequenos é extremamente importante e necessária em algumas áreas do conhecimento. Esta leitura é facilitada quando escrevemos esses números em **Notação Científica**.

MAS O QUE É NOTAÇÃO CIENTÍFICA ?

Para transformar um número qualquer em notação científica devemos escrevê-lo como o produto de um número real, maior ou igual a 1 e menor que 10, por uma potência de base 10 com expoente inteiro.

Para transformar um número qualquer em notação científica devemos escrevê-lo como o **produto de um número real, maior ou igual a 1 e menor que 10, por uma potência de base 10 com expoente inteiro**.

Vejamos alguns exemplos:

1- $62000000 = 62x1.000.000 = \underbrace{(6{,}2x10)}_{62}x1.000.000 = 6{,}2.10^7$

2- $0{,}0000035 = \frac{3{,}5}{1.000.000} = \frac{3{,}5}{10^6} = 3{,}5.10^{-6}$

MÉTODO PRÁTICO

Caso 1: Quando queremos transformar um número maior que 1 (1567 por exemplo) em notação cientifica devemos seguir os passos:

1. **Posicione a virgula:** Coloque a vírgula numa posição em que o número obtido seja maior ou igual a 1 e menor que 10. No caso de 1567, devemos colocar a vírgula entre o 1 e o 5, obtendo 1,567.

2. **Desloque a vírgula para posição original:** Conte quantas casas a vírgula deverá se deslocar (para direita) para voltar à posição inicial: No caso do 1567 a vírgula está originalmente à direita do sete (1567,0) então ela deve se deslocar 3 casas para direita, pois seria o mesmo que multiplicar por 1000, afinal 1567 = 1,567 x 1000.

Logo $1567 = 1{,}567 \times 10^3$.

Caso 2: Quando queremos transformar um número menor que 1 (0,00082) em notação cientifica devemos seguir os passos:

1. **Posicione a virgula:** Coloque a vírgula numa posição em que o número obtido seja maior ou igual a 1 e menor que 10. No caso de 0,00082, devemos colocar a vírgula à direita do 8, obtendo 8,2.

2. **Desloque a vírgula para posição original:** Conte quantas casas a vírgula deverá se deslocar (para esquerda) para voltar à posição inicial: No caso do 0,00082 a vírgula deve se deslocar 4 casas para esquerda, pois seria o mesmo que dividir 8,2 por 10.000, afinal 0,00082 = 8,2 : 10.000.

Logo $0{,}00082 = 8{,}2 \times 10^{-4}$.

CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE

Os **critérios de divisibilidade** são ferramentas complementares que utilizamos para rapidamente saber se um número "grande" é divisível por 2, por 3, e assim sucessivamente, até por 10. Lembre-se da importância dos seguintes conceitos, antes de "decorar" os critérios.

- Estamos trabalhando no universo dos Naturais.
- Um número ***A é divisível por B*** quando a divisão de A por B apresenta um quociente natural e resto zero;
- Se ***A é divisível por B*** então A é múltiplo de B e B é divisor de A;
- A quantidade de múltiplos de um número é INFINITA;
- A quantidade de divisores de um número é FINITA.
- O número 1 é divisor de qualquer número natural e sempre o menor.
- O maior divisor de um número é sempre ele mesmo.

E claro, é fundamental e necessário que você saiba fazer qualquer divisão à mão.

Vamos ao critérios!

DIVISIBILIDADE POR 2

Um número é divisível por 2 **quando ele é par**, isto é, quando termina 0, 2, 4, 6 ou 8.

Ex.: 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22...

DIVISIBILIDADE POR 3

Um número é divisível por 3 quando a soma dos seus algarismos resulta em um valor que é divisível por 3.

Ex.: 0, 3, 6, 9, 12, 15, ..., **27,..., 51, ..., 372, ...**

DIVISIBILIDADE POR 4.

Um número é divisível por 4 quando termina em 00 ou o número formado pelos dois últimos algarismos é divisível por 4.

Ex.: 0, 4, 8, 12, 16, ..., 1**00, ... , 544, ... , 2916, ...**

Observação: Também podemos pensar que um número é divisível por 4 quando é divisível por 2, duas vezes, já que 4 = 2 x 2.

DIVISIBILIDADE POR 5

Um número é divisível por 5 quando termina em 0 ou 5.

Ex.: 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, ...

DIVISIBILIDADE POR 6

Um número é divisível por 3 quando é divisível simultaneamente por 2 e por 3. Neste caso precisaremos verificar os critérios de divisibilidade de 2 e 3.

Ex.: 0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, ...

DIVISIBILIDADE POR 7

Para verificar se um número é divisível por 7 precisamos fazer basicamente dois procedimentos, que podem se repetir. Vamos verificar se o número 2415 é divisível por 7:

1. Primeiro devemos **DOBRAR O ÚLTIMO ALGARISMO**: Neste caso é 5, portanto 2 x 5 = 10.

2. Retirando o último algarismo de 2415, resta o número 241. Devemos **subtrair o resultado** encontrado anteriormente de 241, logo 241 – 10 = 231.

3. Será que 231 é divisível por 7 ? Para responder essa pergunta podemos repetir os passos anteriores ou *"dividir na mão"*;

4. Seguindo os mesmos passos, devemos dobrar o algarismo 1, ficando com 1 x 2 = 2.

5. Fazendo a subtração 23 – 2 = 21. E como 21 é divisível por 7, 231 também é divisível por 7.

6. Como 231 é divisível por 7, 2415 também é divisível por 7.

Logo a sequência de múltiplos de 7 é: 0, 7, 14, 21, 28, ... ,2415, ...

DIVISIBILIDADE POR 8

O critério de divisibilidade por 8 é muito parecido com o critério de divisibilidade por 4.

Um número é divisível por 8 quando termina em 000 ou o número formado pelos três últimos algarismos é divisível por 4.

Ex.: 0, 8, 16, 24, ..., 1**000, ... , 1792, ... ,**

Observação: Também podemos pensar que um número é divisível por 8 quando é divisível por 2, três vezes, já que 8 = 2 x 2 x 2.

DIVISIBILIDADE POR 9

O critério de divisibilidade por 9 é muito parecido com o critério de divisibilidade por 3.

Um número é divisível por 9 quando a soma dos seus algarismos resulta em um valor que é divisível por 9.

Ex.: 0, 9, 18, 27, 36, 45, ..., 225, ..., 387, ..., 3789, ...

DIVISIBILIDADE POR 10

Esse é o mais fácil!

Um número é divisível por 10 quando termina em 0.

EXERCÍCIOS

1. (Uel) Para todo x real, a expressão $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4} + 3^{x+5}$ é equivalente a:

a) 3^{6x+15}

b) $5.\ 3^x$

c) $6.\ 3^x$

d) 243^x

e) $364.\ 3^x$

2. Sejam dados os seguintes números: 9^{30}, 27^{10} e 81^{8}. Qual é o maior deles? Justifique.

3. **(CEFET)** O quociente de 50^{50} por 25^{25} é igual a:

a) 25^{25}

b) 10^{25}

c) 100^{25}.

d) 2^{25}

e) 2×25^{25}

4. Se $2^{2008} - 2^{2007} - 2^{2006} + 2^{2005} = k \cdot 2^{2005}$, então o valor de k é:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

5. **(CEFET)** Sendo a $^{0,123} = 5$, a ^{0,369} é igual a:

a) $5^{0,246}$

b) 5/3

c) $\sqrt{5}$ d) 15

e) 125

6. **(CEFET)** Se a idade da Terra é avaliada em quatro e meio bilhões de anos, a décima oitava parte desse tempo é igual a:

a) $5^{9} \times 2^{7}$

b) $5^{9} \times 2^{8}$

c) $5^{9} \times 2^{9}$

d) $5^{10} \times 2^{9}$

e) 10^{10}

7. (CMRJ) Assinale a única falsa, dentre as alternativas abaixo:

a) $\left(3^{-4}\right)^{5} = \left(\frac{1}{3}\right)^{20}$

b) $2^{-3} \div 2^{-8} = 2^{5}$

c) $\frac{16^{2} \times 8^{3}}{2^{9}} = 2^{8}$

d) $\sqrt[3]{8} \div \sqrt{2} = 1$

e) $\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{1}{2}} = 1$

8. **(CAP-UFRJ)** Sabendo que $2x + 2y = 6$, determine o valor de 2^{x+y}.

9. **(OBM)** A razão $\frac{\left(2^4\right)^8}{\left(4^8\right)^2}$ é igual a:

a) 1/4
b) 1/2
c) 1
d) 2
e) 8

10. **(OBM)** A diferença entre os quadrados de dois números inteiros positivos consecutivos é sempre:

a) um número primo
b) um múltiplo de 3
c) igual à soma desses números
d) um número par
e) um quadrado perfeito

11. Determine o valor que k deve assumir de modo que $\frac{2^{31}.4^{50}}{2} = 4^{5k}$.

a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 14

12. A potência $3^{k^2+100} + 3^{k^2+101} + 3^{k^2+102}$ é sempre um múltiplo de:

a) 19
b) 17
c) 13
d) 11
e) 7

GABARITO

1. E
2. 9^{30}
3. C
4. C
5. E
6. A
7. D
8. 8
9. C
10. C
11. D
12. C