Matemática em Foco

Fala meu querido *Xavialuno*, beleza pura?

Este *ebook* é sobre Funções Trigonométricas.

Vamos pra cima!

Introdução

Estudar funções trigonométricas no final de trigonometria tem uma enorme vantagem pois você não vai precisar de grande conhecimento adicional. Mas o que eu quero dizer com isso?

Se você já domina ciclo trigonométrico, os arcos notáveis e seus simétricos nos quadrantes, equações e identidades trigonométricas, provavelmente você não vai ter dificuldade nessa parte.

As funções trigonométricas também são chamadas de funções circulares, já que estão associadas ao círculo trigonométrico, e por isso, cada uma delas possui um ciclo ou período.

Veremos com mais detalhes a seguir funções seno, cosseno, tangente e suas variações.

Função seno ou Senoide

Primeiro pense nas variações que você já conhece do seno em uma volta no ciclo trigonométrico:

x	senx
0	0
π/6	1/2
π/4	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
π/3	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
π/2	1
π	0
3π/2	- 1
2 π	0

Os valores acima vão se repetir ao longo das próximas voltas no ciclo, assim como outros valores que não estão na tabela como o seno dos **simétricos aos ângulos notáveis**, como **120º, 225º, 300º** e outros.

Define-se como função seno (ou senoide) a função **f(x) = senx**.

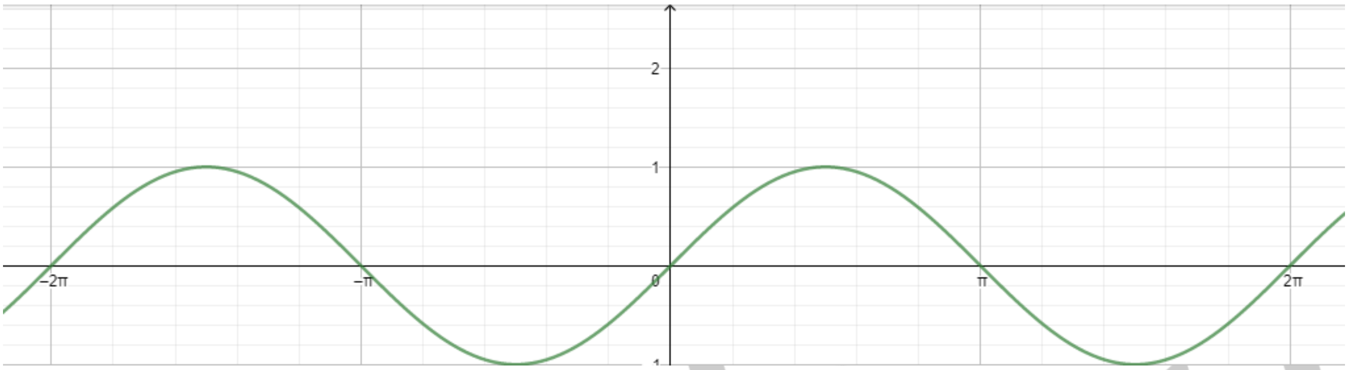
Agora vejamos algumas características importantes.

- **Domínio:** a função está definida para todo x real, logo seu domínio é o conjunto R.
- **Imagem: [-1, 1]**

  Note no gráfico a seguir que a imagem da função oscila entre -1 e 1, ou seja, valor mínimo é -1 e valor máximo + 1. Portanto, $-1 \leq f(x) \leq 1$.
- **Período: 2π**

  Significa que a função seno completa um ciclo a cada 2π radianos percorridos no domínio.

Vejamos agora as informações acima explícitas no gráfico da função.



Ciclo = 2π

Função cosseno ou Cossenoide

A função cosseno segue a mesma lógica da função seno. Define-se como função cosseno (ou cossenoide) a função **f(x) = cosx**.

Primeiro vamos preencher novamente a tabela com os valores de cosx na primeira volta do ciclo.

x	cosx
0	1
π/6	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
π/4	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
π/3	1/2

π/2	0
π	-1
3π/2	0
2 π	1

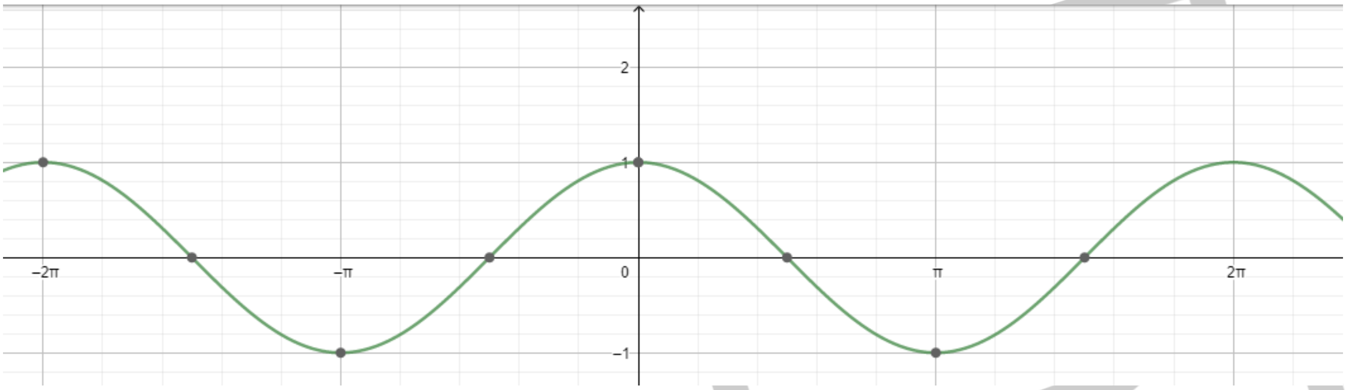
As características citadas para função seno também valem para função cosseno.

- **Domínio:** a função está definida para todo x real, logo seu domínio é o conjunto R.
- **Imagem: [-1, 1]**

  Note no gráfico a seguir que a imagem da função oscila entre -1 e 1, ou seja, valor mínimo é -1 e valor máximo + 1. Portanto, $-1 \leq f(x) \leq 1$.
- **Período: 2π**

  Significa que a função cosseno completa um ciclo a cada 2π radianos percorridos no domínio.

Vamos ao gráfico.



Ciclo = 2π

Função Tangente

A função tangente possui características diferentes das funções seno e cosseno mas a lógica para sua construção é a mesma.

Primeiro vamos construir a tabela com os valores da tangente.

x	tgx
0	0
π/6	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
π/4	1
π/3	$\sqrt{3}$

π/2	Não está definida
π	0
3π/2	Não está definida
2 π	0

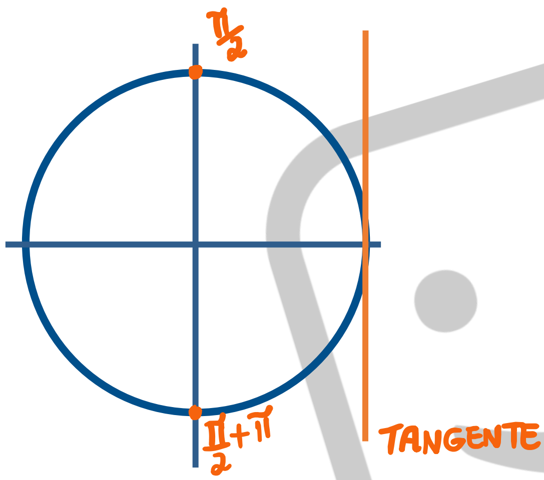
A função tangente apresenta um comportamento diferente das funções seno e cosseno, afinal a tangente não está definida nas extremidades π/2 e 3π/2, o que significa que o domínio da função tangente não é o conjunto dos números Reais.

Para determinarmos o domínio da função **f(x) = tgx** precisamos excluir todos os arcos com extremidades em π/2 e 3π/2, portanto esses arcos são:

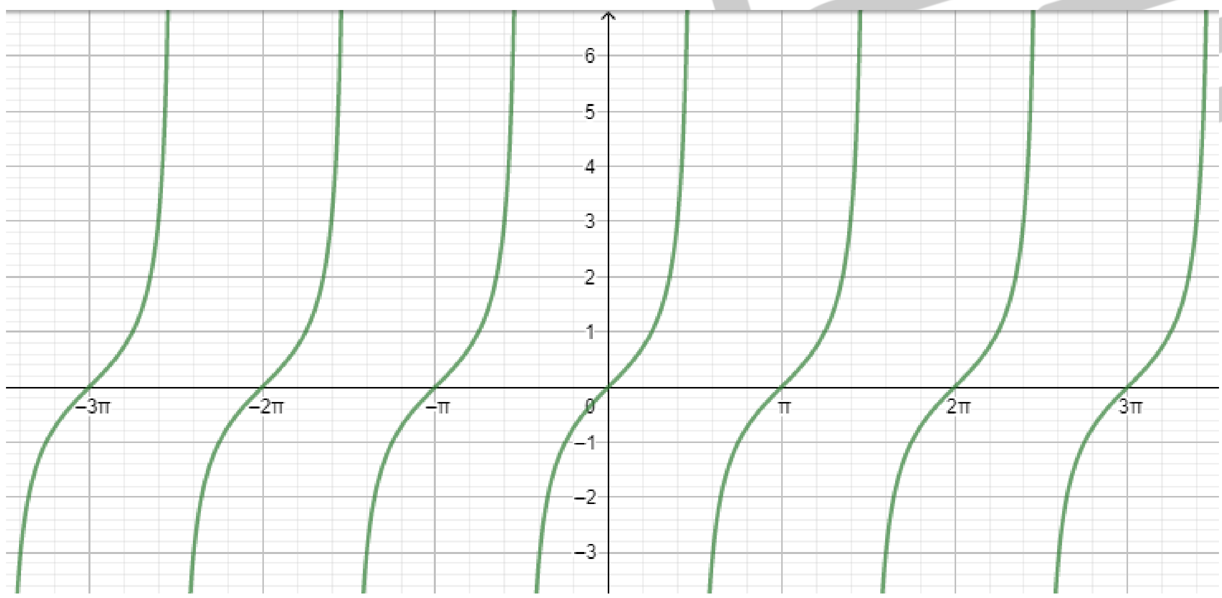
$$\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}+\pi;\frac{\pi}{2}+2\pi;\frac{\pi}{2}+3\pi;\frac{\pi}{2}+4\pi\ldots$$

Generalizando temos:

$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} |\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$$



As funções seno e cosseno são limitadas no intervalo [-1, 1] mas a função tangente não, pelo contrário. Vejamos o gráfico da função **f(x) = tgx**.



Como podemos observar no gráfico acima, a imagem da função corresponde à todos os números reais, portanto Im(f) = $\mathbb{R}$ **.**

A função **f(x) = tgx** possui período igual a π, ou seja, ela completa um ciclo a cada π radianos percorridos no domínio.

Observação importante

Vimos anteriormente características das funções seno, cosseno e tangente como período, e imagem. Essas características apresentações variações em funções do tipo:

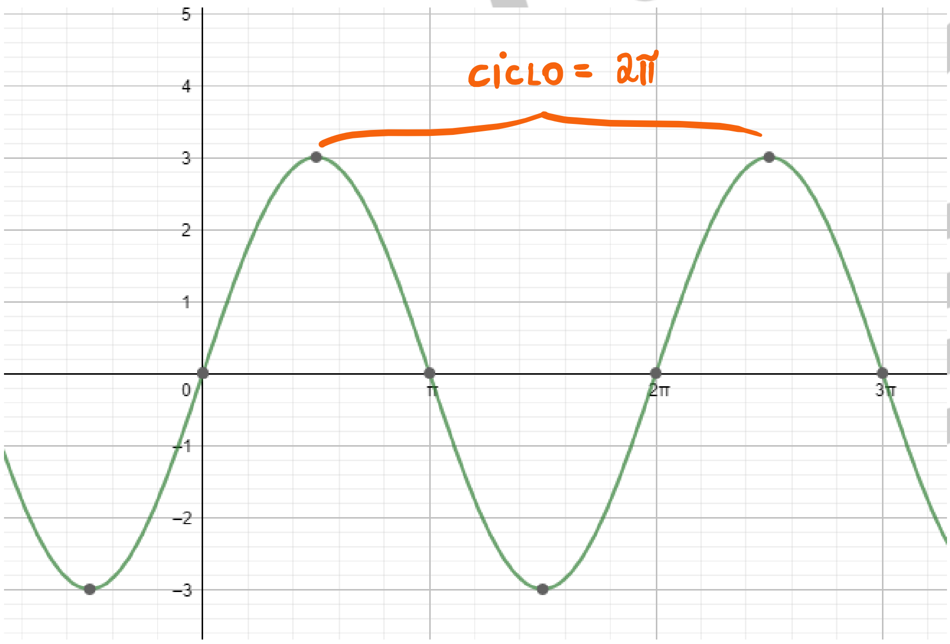
- F(x) = a + b.sen(cx + d)
- G(x) = a + b.cos(cx + d)
- H(x) = a + b.tg(cx + d)

Para as funções seno e cosseno do tipo **F(x) = a + b.sen(cx + d)** e **G(x) = a + b.cos(cx + d)** temos que:

- Imagem é dada pelo intervalo [a - |b| ; a + |b|]
- Período é dado pela divisão $\frac{2\pi}{|c|}$

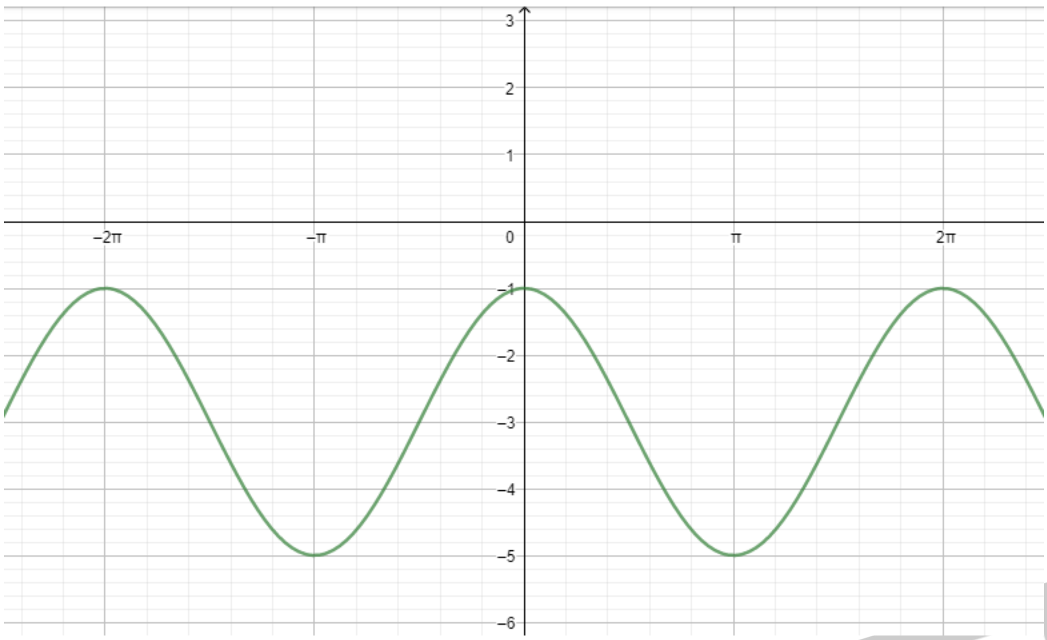
Vejamos o gráfico de algumas funções que apresentam essas variações.

1. Primeiro o gráfico da função **F(x) = 3senx.**



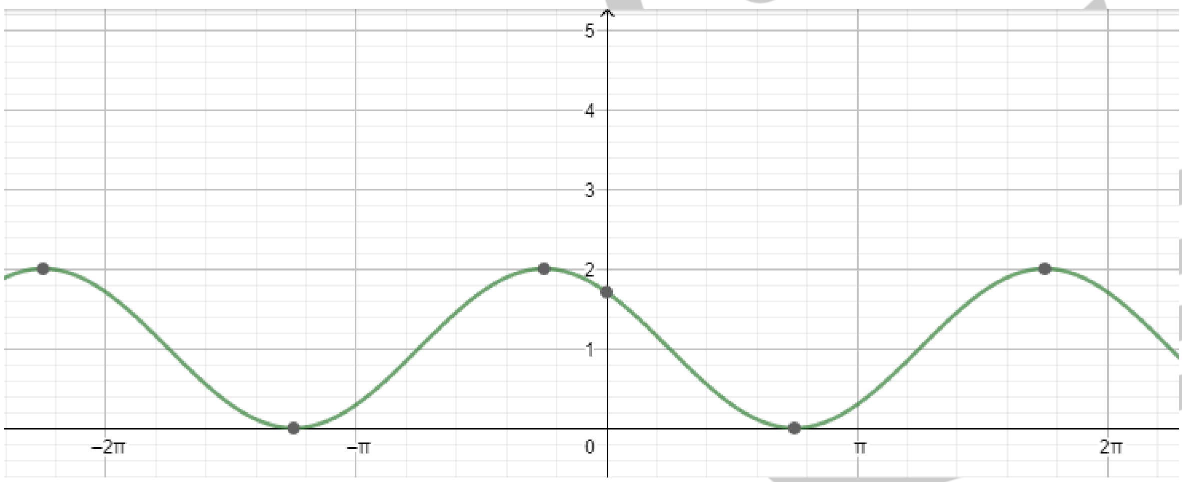
Note que neste caso o **período continua sendo 2π** e a imagem alterou para o intervalo [-3, 3]. Dizemos neste caso que o **gráfico foi alongado verticalmente**. Esse alongamento depende do valor de **"b"** nas expressões F(x) = a + b.sen(cx + d) e G(x) = a + b.cos(cx + d).

2. Vejamos agora outro exemplo, agora com a função **G(x) = - 3 + 2cosx .**



Note que o período da função **G(x) = - 3 + 2cosx** também é 2π e a imagem oscila com -5 ≤ G(x) ≤ -1, então a **Im(G) = [-5, -1].**

3. Agora vejamos o gráfico da função **H(x) = 1 – sen**$\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$**.**



Note que o gráfico oscila com 0 ≤ H(x) ≤ 2, logo a Im(H) = [0, 2]. igual ao intervalo [0, 2] e o período da função também é 2π.

Outras funções trigonométricas

Também devemos considerar as funções cotangente, secante e cossecante.

1. Função Cotangente:

Sabemos que a cotangente é o inverso da tangente, logo **cotgx** = $\boldsymbol{\frac{\cos x}{senx}}$ **; senx ≠ 0** então definimos a **função cotangente** por:

$$f: D \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \frac{1}{tgx}$$
$$D = \mathbb{R} - \{k\pi\};\ k \in \mathbb{Z}$$

Note que **são excluídos do domínio** da função cotangente os ângulos (arcos) que não possuem tangente definida.

2. Função Secante:

Sabemos que a secante é o inverso do cosseno, logo **secx** = $\boldsymbol{\frac{1}{cosx}}$ **; cosx ≠ 0** então definimos a **função secante** por:

$$f: D \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \frac{1}{cosx}$$
$$D = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Note que **são excluídos do domínio** da função secante os ângulos (arcos) que possuem cosseno igual à zero.

3. Função Cossecante:

Sabemos que a cossecante é o inverso do seno, logo **cossecx** = $\boldsymbol{\frac{1}{senx}}$ **; senx ≠ 0** então definimos a **função cossecante** por:

$$f: D \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \frac{1}{senx}$$
$$\mathbb{R} - \{k\pi\};\ k \in \mathbb{Z}$$

Note que **são excluídos do domínio** da função cossecante os ângulos (arcos) que possuem seno igual à zero.